and $\mathbf{P}$ as differentiation $-i\hbar\,\partial$, $(\partial := \partial_q)$; and let us content ourselves with the special case $\alpha = 0$

$$\hbar^{-2}(f, \mathbf{H} f) = \| \tfrac{1}{2}(q^2\,\partial + \partial q^2)\, f\|^2 - 2\,\|\, q\, f\,\|^2 = \int \mathrm{d}q\; q^2\{|\,q\,f' + f\,|^2 - 2\,|\,f\,|^2\}\,. \quad (26)$$

It is not difficult to see that there are functions $f(q)$ of norm 1 for which the integral in (26) assumes arbitrarily large positive or negative values: In the first case one has to choose $|f'|$ large for large $|q|$ whereas in the second case one may choose f like a table mountain profile.

In order to see that $\mathbf{H}$ in (25) has *continuous spectrum* for $\alpha < 7\,\hbar^2/4$, we consider its eigen value equation in the position representation

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{H} - H_j)\, f_j \\ &= -\hbar^2(q^4+\alpha)\,\{\partial^2 + 4\,q^{-1}(1+\alpha\,q^{-4})^{-1}\,\partial + 3\,q^{-2}(1+\alpha\,q^{-4})^{-1}\,(1-\alpha/3\,\hbar^2 + H_j\,q^{-2}/3\,\hbar^2)\}\, f_j \end{aligned} \quad (27)$$

which becomes asymptotically for large $|q|$

$$0 \cong \{\partial^2 + 4\,q^{-1}\,\partial + 3\,q^{-2}(1-\alpha/3\,\hbar^2)\}\, f\,. \quad (28)$$

Here we have written f for f_j because the eigen value H_j does not enter into the asymptotic form. Eq. (28) can be solved in closed form by means of a power ansatz:

$$f \cong c\,q^{\gamma} \quad \text{with} \quad \gamma = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\alpha/\hbar^2 - \tfrac{3}{4}}\,. \quad (29)$$

This is the asymptotic form of all eigen functions for $|q| \to \infty$, where the two signs of the square root correspond to the two linearly independent solutions. If both of them are square integrable, so are all solutions of Eq. (27), and the spectrum contains all the reals. This happens for $\gamma < -1/2$, or $\alpha/\hbar^2 < 7/4$ as has been claimed above.

Erweiterte Gravitationstheorie, Machsches Prinzip und rotierende Massen

Dieter R. Brill

Sloane Physics Laboratory, Yale University, New Haven, Connecticut
und Center for Theoretical Studies, University of Miami, Coral Gables, Florida

(Z. Naturforschg. 22 a, 1336—1341 [1967]; eingegangen am 25. Mai 1967)

Herrn Professor Dr. Pascual Jordan *zum 65. Geburtstag gewidmet*

The rotation of the local inertial frames induced by a rotating shell of mass is calculated in the framework of P. Jordan's "extended theory of gravitation". As a special case, the corresponding results are obtained for Brans and Dicke's "scalar-tensor" theory. In the weak field approximation the result is the same as the Lense–Thirring effect of General Relativity, except for a factor depending on the coupling constant of the scalar field. The strong field limit in which the inertial frame is completely dragged along by the rotating shell is investigated. In particular it is shown that this limit of perfect dragging occurs in certain cosmological models whenever the density of the rest of the matter in the universe tends to zero. This result is interpreted as a manifestation of Mach's principle in the extended theory of gravitation.

Das wachsende Interesse an der Jordanschen erweiterten Gravitationstheorie [1a] beruht einerseits auf einer Anzahl experimenteller Tatsachen, die auf eine zeitlich und räumlich veränderliche Gravitations-„konstante" hinweisen [1b] und andererseits auf den anziehenden mathematischen Eigenschaften dieser natürlichen Verallgemeinerung der Einsteinschen Gravitationstheorie. So haben z. B. Brans und Dicke besonders hervorgehoben, daß bei geeigneter Parameterwahl die Jordansche Theorie eine gewisse Form des Machschen Prinzips erfüllt [2]. Leider ist das Machsche Prinzip heute immer noch eine heuri-

[1a] Unter der „erweiterten Gravitationstheorie" verstehen wir die zuerst von Jordan [1b] aufgestellten Gleichungen, die die Gravitationserscheinungen als Auswirkung einer pseudo-Riemannschen Metrik und eines skalaren Feldes erklären. Bis auf geringe Unterschiede der Bezeichnung ist diese Theorie identisch mit Dickes [1b] „Skalar-Tensor"-Theorie. Da der Fragenkreis der vorliegenden Arbeit nur mit der erweiterten Gravitationstheorie zu tun hat, wollen wir hier auf den übrigen Teil der Jordanschen Theorie (z. B. die Theorie der Sternentstehung und die Theorie der Erdexpansion) nicht weiter eingehen.

[1b] Siehe z. B. P. Jordan, Schwerkraft und Weltall, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1955, § 34. — P. Jordan, Problems of Gravitation—Empirical Aspects of Dirac's Hypothesis, Office of Aerospace Res. Rep. 1961. — R. H. Dicke, Physics Today **20**, 55 [1967]. — R. H. Dicke u. H. M. Goldenberg, Phys. Rev. Letters **18**, 318 [1967].

[2] C. Brans u. R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 [1961].

stische Anregung und keine exakt anwendbare, allgemein anerkannte Aussage. BRANS und DICKE betonen die kosmologische Seite des MACHschen Prinzips und zeigen u. a., daß die lokale Gravitationskonstante größenordnungsmäßig als Auswirkung der Gesamtmasse des Weltalls erklärt werden kann.

Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet des MACHschen Prinzips betrifft rotierende Massen. Im Gegensatz zu den kosmologischen Überlegungen, die in erster Linie theoretischer Natur sind (da sich mit dem Weltall als Ganzem nicht experimentieren läßt) besteht hier die Möglichkeit der experimentellen Prüfung. Bei der berühmten Besprechung des NEWTONschen Eimerversuchs zur Bestimmung von Inertialsystemen schreibt MACH [3]: „Der Versuch NEWTONS mit dem rotierenden Wassergefäß lehrt nur, daß die Relativdrehung des Wassers gegen die Gefäßwände keine merklichen Zentrifugalkräfte weckt, daß dieselben aber durch die Relativdrehung gegen die Masse der Erde und die übrigen Himmelskörper geweckt werden. Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde, wenn die Gefäßwände immer dicker und massiger, zuletzt mehrere Meilen dick würden."

Wenige Jahre nach dem Erscheinen der EINSTEINschen allgemeinen Relativitätstheorie haben LENSE und THIRRING gezeigt, daß ein solches Mitschleppen des Inertialsystems in der EINSTEINschen Theorie tatsächlich stattfindet. Diese Berechnung gilt jedoch nur für genügend geringe Massen, bei denen die lineare Näherung der Feldgleichungen benutzt werden kann. In letzter Zeit ist es gelungen [4], das Mitschleppen auch für beliebig große, aber langsam rotierende Massen zu berechnen. In der vorliegenden Arbeit wollen wir diese Berechnungen auf die erweiterte Gravitationstheorie ausdehnen.

1. Die Grundgleichungen der erweiterten Gravitationstheorie

Die erweiterte Gravitationstheorie soll hier in der Form und mit den Bezeichnungen benutzt werden, die in einer früheren Zusammenfassung [5] der Theorie eingeführt wurden und die größtenteils mit den Bezeichnungen in JORDANS Buch [1b] übereinstimmen. Die Gleichungen dieser Zusammenfassung sollen durch den Präfix B gekennzeichnet werden.

Das Variationsprinzip in allgemeiner Form ist

$$\delta\int \mathfrak{G}\, \mathrm{d}^4x = 0, \quad \mathfrak{G} = \varkappa^\eta \left(R - \zeta\, \frac{\varkappa_{,i}\, \varkappa^{,i}}{\varkappa^2} + \varkappa L\right) \sqrt{-g}\,, \tag{B 2}$$

und die daraus folgenden Feldgleichungen sind

$$0 = \frac{\delta G}{\delta g^{ij}} = R_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij}\, R + \frac{(\varkappa^\eta)_{;ij}}{\varkappa^\eta} + \zeta\, \frac{\varkappa_{,i}\, \varkappa_{,j}}{\varkappa^2} - g_{ij}\left[\frac{\Box \varkappa^\eta}{\varkappa^\eta} + \frac{\zeta}{2}\, \frac{\varkappa_{,l}\, \varkappa^{,l}}{\varkappa^2}\right] + \varkappa\, T_{ij}\,, \tag{B 4a}$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \eta\, g^{ij}\, \frac{\delta G}{\delta g^{ij}} + \varkappa\, \frac{\delta G}{\delta \varkappa} = \varkappa^{\eta+1}(\eta\, T + b) - \frac{2\,\zeta + 3\,\eta^2}{\eta}\, \Box \varkappa^\eta\,, \tag{B 4b}$$

wobei

$$T_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\delta \sqrt{-g}\, L}{\delta g^{ij}}\,; \qquad b = \frac{1}{\varkappa^\eta}\, \frac{\delta \varkappa^{\eta+1} L}{\delta \varkappa}\,; \quad T = T_i^{\,i}. \tag{B 5}$$

Zur Berechnung lokaler Effekte, wie des LENSE–THIRRING-Effektes, haben die Parameter η und b die Werte (EDDINGTON–PAULIsches Postulat nach JORDAN [1b], oder Skalar-Tensor-Theorie nach BRANS und DICKE [2]).

$$\eta = -1, \qquad b = 0\,. \tag{B 14}$$

Für kosmologische Erörterungen mit statistischer Beschreibung der Materieerzeugung durch Verschmelzung von vorher getrennten Kosmen empfiehlt JORDAN [6] die Parameterwahl

$$\eta = +1, \qquad b = 0\,. \tag{B 17}$$

Für den Fall der Parameterwahl (B 14) hat DICKE [7] die erweiterte Gravitationstheorie auf eine andere, äquivalente Form gebracht. Diese Transformation läßt sich auch für allgemeine Parameter angeben: Es sei

$$g'_{ij} = \varkappa^\eta\, g_{ij}\,, \quad L' = \varkappa^{-\eta+1} L\,, \quad \zeta' = \zeta + \tfrac{3}{2}\eta^2. \tag{1}$$

[3] E. MACH, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, 5. Auflage, F. A. Brockhaus Verlag, Wiesbaden 1904, Kap. 2. Abschn. 6.

[4] D. R. BRILL u. J. M. COHEN, Phys. Rev. **143**, 1011 [1966].

[5] D. R. BRILL, Review of JORDAN's Extended Theory of Gravitation, Proc. E. Fermi School, Course XX, Academic Press, New York 1962.

[6] P. JORDAN, Z. Physik **157**, 172 [1959]. Es ist dem Verfasser kein Beweis dafür bekannt, daß die Theorie (B 17) tatsächlich eine statistische Annäherung der Theorie (B 14) in diesem Sinne darstellt. Der Satz von W. KUNDT über Nicht-Existenz von Hosenwelten [6a] zeigt, daß Materieerzeugung durch Verschmelzung sich auf keine einfache Weise in einem normalhyperbolischen Raum realisieren läßt.

[6a] W. KUNDT, Commun. Math. Phys. **4**, 143 [1967].

[7] R. H. DICKE, Phys. Rev. **125**, 2163 [1962].

Damit wird der Integrand in (B 2)

$$G = \varkappa^{\eta}\,(R - \zeta\,(g^{ij}\,\varkappa_{,i}\,\varkappa_{,j}/\varkappa^2) + \varkappa\,L)\,\sqrt{-g}$$
$$= (R' - \zeta'\,(g'^{ij}\,\varkappa_{,i}\,\varkappa_{,j}/\varkappa^2) + L')\,\sqrt{-g'}$$
$$+ \text{Divergenz.} \qquad (2)$$

Das transformierte Variationsprinzip — und damit auch die Feldgleichung — hat die EINSTEINsche Form: Das $\varkappa$-Feld tritt, wie ein zusätzliches Materiefeld, nur in den letzten beiden Gliedern auf. Die Metrik g_{ij}' beschreibt natürlich nicht die wahre Raumzeitgeometrie, und Probeteilchen bewegen sich deshalb auch nicht auf Geodätischen der g_{ij}'-Geometrie, sondern auf Geodätischen der g_{ij}-Geometrie. Im Rahmen der transformierten Geometrie kann man diese Abweichung von Geodätischen anschaulich verstehen als eine *direkte* Wechselwirkung zwischen dem $\varkappa$-Feld und den Teilchen. (In der ursprünglichen Theorie hat das $\varkappa$-Feld keinen direkten Einfluß auf Probeteilchen, sondern bestimmt nur die *Stärke* der Gravitationswechselwirkung.) DICKE [7] hat gezeigt, daß man die Transformation (1) als eine Transformation der Längen- und Masseneinheiten auffassen kann [8a].

2. Größenordnung des Machschen Mitschleppens des Inertialsystems

Der LENSE–THIRRING-Effekt läßt sich in der transformierten Form (2) der erweiterten Gravitationstheorie leicht abschätzen. In dieser Form rührt ein *Teil* des Gewichtes eines Probeteilchens von der Raumkrümmung her, und der Rest von der Wechselwirkung mit dem skalaren Feld. Die Größe dieses Anteils hängt mit dem Wert von ζ eindeutig zusammen:

$$\begin{array}{l}\text{Bruchteil der Gravitationskraft,}\\ \text{der durch Raumkrümmung verursacht ist}\end{array} = \frac{3+2\,\zeta}{4+2\,\zeta}. \qquad (3)$$

Auf Grund seiner Messungen der Sonnenabplattung und der Daten über die Merkur-Periheldrehung schätzt DICKE [1], daß etwa 6% der Sonnenanziehung von dem $\varkappa$-Feld herrührt, was einer Größenordnung $\zeta \sim 6$ entspricht.

Die Winkelgeschwindigkeit Ω des Inertialsystems (gegenüber einem von der rotierenden Masse weit entfernten Beobachter) wird durch die CORIOLIS-Kraft bestimmt. Das skalare $\varkappa$-Feld hat aber eine zu hohe Symmetrie, um CORIOLIS-Kräfte auf Probeteilchen auszuüben. Deshalb ist zu erwarten, daß in der JORDANschen Theorie nur derjenige Bruchteil des LENSE–THIRRINGschen Effektes auftritt, der dem von der Raumkrümmung verursachten Gewichtsanteil entspricht [8b],

$$\Omega \sim \frac{3+2\,\zeta}{4+2\,\zeta}\left(\frac{4\,\omega}{3\,R}\right)\frac{G\,M}{c^2}. \qquad (4)$$

Hierbei ist M die rotierende Masse, ω ihre Winkelgeschwindigkeit, R ihr Radius, und G die von dem weit entfernten Beobachter gemessene Gravitationskonstante.

Mit den von DICKE angegebenen Werten wäre also der LENSE–THIRRINGsche Effekt ca. 6% geringer als in der EINSTEINschen Theorie. Im folgenden werden wir durch ausführliche Rechnung sehen, daß diese Schätzung zutrifft. Eine Abweichung dieser Größenordnung dürfte in den nächsten Jahren in den Bereich des Meßbaren rücken.

3. Inertialsystem in der Umgebung einer langsam rotierenden Massenschale

Für diese Berechnung wollen wir die erweiterte Gravitationstheorie in ihrer ursprünglichen Form benutzen. Da das $\varkappa$-Feld keinen direkten Einfluß auf Probeteilchen hat, läßt sich die Winkelgeschwindigkeit des Inertialsystems leicht aus der Metrik allein ablesen, indem man die Rotationsgeschwindigkeit desjenigen Koordinatensystems findet, in welchem die CORIOLIS-Kraft lokal verschwindet, d. h. in welchem die Komponenten g_{0i} $(i \neq 0)$ der Metrik verschwinden. (Hierbei entspricht der Index 0 der Zeitkoordinate.) Machen wir also den Ansatz für die Metrik (der bei $\Omega = 0$ mit der statischen kugelsymmetrischen Metrik (B 18) übereinstimmt),

$$ds^2 = \varkappa^{-\eta}\,e^{-\nu}\,[dr^2 + e^{\mu}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,(d\varphi - \Omega(r)\,dt)^2) - e^{2\nu}\,dt^2]\,, \qquad (5)$$

so ist $\Omega(r)$ gerade diese Rotionsgeschwindigkeit.

[8a] Die transformierte Theorie ist in mancher Hinsicht anschaulich einfacher zu verstehen als die ursprüngliche Theorie (siehe z. B. Abschnitt 2); jedoch ist sie zur Begründung der erweiterten Gravitationstheorie weniger geeignet. Wenn man nämlich das $\varkappa$-Feld als ein gewöhnliches, zusätzliches Feld ansieht, so besteht kein Grund dafür, daß dieses Feld an dieselbe Quelle — nämlich Masse und Energie — gekoppelt ist wie das Gravitationsfeld, und daß die Kopplungskonstante von derselben Größenordnung ist, wie die des Gravitationsfeldes. Dagegen ist es in der ursprünglichen JORDANschen Fassung der Theorie (besonders in der fünfdimensionalen Form) von vornherein klar, daß das $\varkappa$-Feld einen Teil des Gravitationsfeldes und nicht des Materiefeldes bildet.

[8b] Diese Formel ist schon, bis auf einen fehlenden Faktor $\frac{1}{2}$, von BRANS und DICKE [1b] angegeben worden.

Die Metrik (5) und das dazugehörige $\varkappa$-Feld, $\varkappa = \varkappa(r)$, bleiben invariant, wenn man gleichzeitig die Vorzeichen von Ω und t wechselt. Alle aus der Metrik und dem $\varkappa$-Feld gebildeten Tensoren (z. B. der RIEMANN-Tensor) müssen die entsprechende Symmetrie aufweisen: Die Tensorkomponenten sind gerade oder ungerade Funktionen von Ω, je nachdem, ob sie eine gerade oder ungerade Zahl von Zeit-Indizes besitzen. Wir wollen nun in unserer Berechnung der Effekte *langsam* rotierender Massen Glieder zweiter und höherer Ordnung in Ω vernachlässigen. Die Glieder der Ordnung Ω^0 entsprechen dem statischen Fall. Wenn wir also von der statischen kugelsymmetrischen Lösung ausgehen, brauchen wir nur noch die Korrektion der Ordnung Ω^1 zu berechnen. Nach der obigen Regel sind die einzigen Komponenten des RICCI-Tensors dieser Ordnung die Größen R_{0i} $(i \neq 0)$, und die explicite Rechnung zeigt, daß nur R_{03} nicht verschwindet (wobei $x^3 = \varphi$). Es läßt sich auch leicht einsehen, daß bei einer rotierenden sphärisch-symmetrischen Massenschale T_{03} die einzige von Null verschiedene Komponente dieser Ordnung des Materietensors ist. Um die Größe Ω zu bestimmen, brauchen wir also nur die 0,3-Komponente der Feldgleichung (4 a) zu berechnen. Das *skalare* $\varkappa$-Feld ist nach der obigen Regel eine gerade Funktion von Ω; in der Ordnung Ω^1 hat also die Rotation keinen Einfluß auf das $\varkappa$-Feld, und die Feldgleichung (4 b) bleibt dieselbe wie für die statische Lösung.

Für die Berechnung der Gleichung für Ω empfiehlt es sich, eine Hilfsmetrik ds'^2 und eine orthonormale Kobasis ω^i einzuführen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \varkappa^{-\eta}\, ds'^2, \\ ds'^2 &= e^{-\nu}[dr^2 + e^{\mu}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\ (d\varphi - \Omega\, dt)^2) \\ &\qquad - e^{2\nu}\, dt^2] \\ &= \sum_{i=1}^{3} (\omega^i)^2 - (\omega^0)^2, \\ \omega^0 &= e^{\frac{1}{2}\nu}\, dt, \quad \omega^1 = e^{-\frac{1}{2}\nu}\, dr, \\ \omega^2 &= e^{\frac{1}{2}(\mu-\nu)}\, d\vartheta, \\ \omega^3 &= e^{\frac{1}{2}(\mu-\nu)} \sin\vartheta\ (d\varphi - \Omega\, dt). \end{aligned} \tag{6}$$

Mit Hilfe der Metrik ds'^2 und deren RICCI-Tensor R_{ij}' erhält die Feldgleichung (B 4 a) eine besonders einfache Gestalt, da sich die Glieder mit zweiten Ableitungen von $\varkappa$ wegheben:

$$R'_{ij} - \tfrac{1}{2} g'_{ij} R' + (\zeta + \tfrac{3}{2}\eta^2)\, \frac{\varkappa_{,i}\, \varkappa_{,i}}{\varkappa^2} - g_{ij}(\tfrac{1}{2}\zeta - \tfrac{1}{4}\eta^2)\, \frac{\varkappa_{,l}\, \varkappa^{,l}}{\varkappa^2} + \varkappa\, T_{ij} = 0\,. \tag{7}$$

Wir wollen nun alle Tensorkomponenten bezüglich der Kobasis (6) bilden. In der 0,3-Komponente der Gl. (7) verschwinden dann das zweite und dritte Glied, da $\varkappa$ nur von r abhängt und die Metrik Diagonalform hat. Die übrigen Glieder lassen sich leicht berechnen:

$$\tfrac{1}{2}\, e^{5\nu/2 - 3\mu/2}\, (e^{2(\mu-\nu)}\, \Omega_r)_r \sin\vartheta = \varkappa\, T^{03}. \tag{8}$$

Hier bedeutet der Subindex r die Ableitung nach r.

Die Komponente T^{03} des Materietensors für eine Massenschale, die mit der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt = \omega$ um die Achse $\vartheta = 0$ rotiert, ist[9]

$$T^{03} = (T^{00} + T^{33})\, e^{\frac{1}{2}\mu - \nu}\, (\omega - \Omega) \sin\vartheta\,. \tag{9}$$

Die Feldgleichung (8) für die Winkelgeschwindigkeit Ω des Inertialsystems läßt sich nun etwas vereinfachen:

$$(e^{2(\mu-\nu)}\, \Omega_r)_r = -2\,\varkappa (T^{00} + T^{33})\, e^{2\mu - 7\nu/2} (\omega - \Omega)\,. \tag{10}$$

Als Grenzbedingung wollen wir verlangen, daß das Koordinatensystem im Unendlichen ein Inertialsystem ist,

$$\Omega \to 0(1/r^3) \quad \text{für} \quad r \to \infty\,. \tag{11}$$

Außerhalb der Kugelschale bei $r = R$ verschwinden T^{00} und T^{33}. Innerhalb der Kugelschale muß aus Gründen der Stetigkeit Ω konstant sein. Das erste Integral läßt sich also bis auf eine Integrationskonstante c leicht hinschreiben:

$$\begin{aligned} \Omega_r &= c\, e^{2(\nu-\mu)} && \text{für} \quad r > R\,, \\ \Omega_r &= 0 && \text{für} \quad r < R\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Funktionen e^{ν} und e^{μ} sind aus der HECKMANN–JUSTschen Lösung[10] (B 20) in nullter Ordnung – und nach der obigen Regel daher auch in erster Ordnung – bekannt:

$$\begin{aligned} e^{\mu} &= r^2 - A\,, \\ e^{\sqrt{A}\nu/m} = e^{\sqrt{A}\varkappa/m} &= (r - \sqrt{A}) / (r + \sqrt{A}), \\ A &= m^2 + 2(\zeta + \tfrac{3}{2}\eta^2)\, n^2, \end{aligned} \tag{13}$$

wobei m und n Integrationskonstanten sind. Das zweite Integral läßt sich als Potenzreihe darstellen,

$$\Omega = -\frac{c}{3(r - \sqrt{A})^3} + \frac{c(m + \sqrt{A})}{(r - \sqrt{A})^4} + \dots\,. \tag{14}$$

Schließlich läßt sich auch die Konstante c in Gl. (12) durch Integration von (10) innerhalb der Massen-

[9] Siehe Abschnitt IV bei BRILL und COHEN [4].

[10] O. HECKMANN, P. JORDAN u. W. FRICKE, Z. Astrophys. **28**, 113 [1951]. — K. JUST, Z. Phys. **140**, 524 [1955]. — K. JUST, Habilitations-Schrift, Berlin 1957.

schale berechnen. Man kann annehmen, daß die Schale so dünn ist, daß sich μ, ν und $\varkappa$ nur langsam verändern und bei der Integration als konstant behandelt werden können:

$$c = -2[\varkappa\, e^{2\mu-\frac{1}{2}\nu}(\omega-\Omega)]_{r=R}\int(T^{00}+T^{33})\,\mathrm{d}r\,. \quad (15)$$

4. Diskussion des Resultates

Wir behandeln zunächst den Fall einer kleinen Masse, bei der $R \gg m$ und $\omega \gg \Omega$ ist [11], und rechnen in der niedrigsten Ordnung.

Die Integrationskonstanten n und c haben dann infolge der Gln. (B 22) [12] die Werte

$$\begin{aligned} n &= m/(3+2\zeta)\,,\\ c &= -2\,\varkappa_0\,\omega\,R^2\left(\frac{1}{4\pi}\int T^{00}\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r\right)\\ &= -4\,\omega\,R^2\,\varkappa_0\,m\,, \end{aligned} \quad (16)$$

und die Koeffizienten in der Metrik haben die Form

$$\begin{aligned} e^{\mu} &= r^2\,,\\ e^{\pm\nu} &= 1 \mp \frac{2\,m}{r}\left(\frac{4+2\,\zeta}{3+2\,\zeta}\right),\\ \varkappa &= \left(1-\frac{2\,m}{(3+2\,\zeta)\,r}\right),\\ \Omega &= \begin{cases} \dfrac{4\,\omega\,R^2}{3\,r^3}\,m & \text{für} \quad r>R\,,\\ \dfrac{4\,\omega}{3\,r}\,m & \text{für} \quad r<R\,. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Die physikalische Bedeutung der Größe m ist dadurch gegeben, daß der Koeffizient von $\mathrm{d}t^2$ in der Metrik asymptotisch mit dem Newtonschen Gravitationspotential Φ zusammenhängt:

$$e^{\nu} \to 1 + \frac{2\,\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2\,G\,M}{c^2\,r} \quad \text{für} \quad r \to \infty\,. \quad (18)$$

Beim Vergleich zwischen (18) und (17) kann man die verschiedenen Faktoren als Anteil der Masse oder der Gravitationskonstante zählen. Es ist aber am einfachsten, wenn man den universellen Faktor als Renormierung der Gravitationskonstante G auffaßt. Die physikalische Masse M der Kugelschale und der Parameter m hängen dann wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} m &= G_0\,M/c^2\,,\\ G &= \frac{4+2\,\zeta}{3+2\,\zeta}\,G_0 = \text{physikalische Gravitationskonstante.} \end{aligned} \quad (19)$$

Man erhält dann als Resultat für Ω

$$\Omega = \begin{cases} \dfrac{4\,\omega\,R^2}{3\,r^3}\left(\dfrac{3+2\,\zeta}{4+2\,\zeta}\right)\dfrac{G\,M}{c^2} & \text{für} \quad r>R\,,\\ \dfrac{4\,\omega}{3\,R}\left(\dfrac{3+2\,\zeta}{4+2\,\zeta}\right)\dfrac{G\,M}{c^2} & \text{für} \quad r<R\,, \end{cases} \quad (20)$$

in Übereinstimmung mit der Überlegung in Abschnitt 2.

Auf ähnliche Weise kann man aus den Gleichungen des Abschnitts 3 Ω mit größerer Genauigkeit in $G\,M/c^2\,R$ berechnen. Die Resultate sind weitgehend analog zu denen in der Einsteinschen Theorie. Besonders interessant ist der Grenzfall, bei dem das Inertialsystem vollkommen mitgeschleppt wird,

$$\Omega = \omega\,, \qquad r<R\,. \quad (21)$$

Betrachten wir nun die Gln. (10) und (12), so sehen wir, daß die linke Seite von (10) von Null verschieden ist, während auf der rechten Seite der Faktor $\omega - \Omega = 0$ steht. Das ist nur möglich, wenn einer der übrigen Faktoren in diesem Grenzfall unendlich wird. Gleichung (13) zeigt, daß tatsächlich $e^{-\nu}$ divergiert, wenn

$$R^2 = A = m^2 + 2(\zeta + \tfrac{3}{2}\,\eta^2)\,n^2\,. \quad (22)$$

In diesem Grenzfall divergiert auch die Rotverschiebung zwischen dem Inneren der Kugelschale und dem Unendlichen. Das Zusammentreffen der unendlichen Rotverschiebung und des vollkommenen Mitschleppens ist also der Jordanschen und Einsteinschen Theorie gemein; jedoch ist der Wert von R/M, bei dem dies auftritt, in den beiden Theorien verschieden [13].

Brans und Dicke [2] zeigen in der lokalen Theorie mit Parameterwerten (B 14), daß in der frühen Expansionsphase des Universums mit der Massendichte ϱ_0 die Größe $\Phi = \varkappa^{-1}$ proportional zu ϱ_0 ist,

$$\varkappa_0^{-1} = (\text{const})\cdot\varrho_0\,. \quad (23)$$

[11] Physikalisch bedeutet das, daß der Schalenradius viel größer ist als der Schwarzschild-Radius, und daß das Inertialsystem viel langsamer rotiert als die Schale selbst.

[12] $$n = \frac{1}{16\,\pi\,\alpha}\int \varkappa^{1+\eta}(\eta\,T+b)\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^3x\,, \quad \text{(B 22b)}$$

$$n = \frac{1}{4\,\pi}\int \varkappa^{1+\eta}(\tfrac{1}{2}\,T - T_4{}^4)\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^3x\,. \quad \text{(B 22a)}$$

[13] Die Koordinate r der Metrik (5) ist weder mit der Schwarzschildschen noch der isotropen r-Koordinate zu vergleichen; die Metrik (5) läßt sich durch Einführung einer neuen Koordinate r', mit $r = \frac{1}{2}(r' + A/r')$ auf isotrope Form bringen.

Läßt man nun ϱ_0 immer geringer werden, so wachsen $\varkappa$ und G und damit auch [Gl. (20)] das Mitschleppen Ω/ω des Inertialsystems. Wenn aber Ω/ω vergleichbar mit 1 wird, so gilt die Näherung nicht mehr, auf der (20) beruht. Jedoch kann man mit der exakten Lösung die Verhältnisse in diesem Grenzfall diskutieren. Eine Beschränkung tritt lediglich dadurch auf, daß der Ausdruck (23) nicht mehr physikalisch sinnvoll ist, wenn ϱ_0 die Größenordnung M/R^3 erreicht. Man kann aber trotzdem die mathematische Frage stellen, welchen Wert Ω/ω erreicht, wenn man M und den physikalischen Radius R_0 der Kugelschale konstant hält und $\varkappa$ wachsen läßt.

Der Radius R_0 mißt z. B. den Umfang der Kugelschale; die Metrik (5) zeigt, daß R_0 wie folgt von R abhängt [bei Parameterwahl (B 14)]:

$$R_0{}^2 = [\varkappa\, e^{-\nu}]_{r=R} \cdot (R^2 - A) . \tag{24}$$

Wir setzen $e^{-\nu}$ aus Gl. (13) ein und bemerken, daß bei großem Druck n sehr klein im Vergleich zu m ist:

$$R_0{}^2 \approx \varkappa(R) \cdot (R+\sqrt{A})^2 \cdot (R-\sqrt{A})^{(\zeta+3/2) n^2 m^2} .$$

Wächst $\varkappa(\infty) = \varkappa_0$ der Gl. (23), so wächst auch $\varkappa(R)$. Soll also $R_0{}^2$ konstant bleiben, so muß R nach $\sqrt{A}$ streben. Das ist aber gerade der Grenzfall der Gl. (22), bei dem das Inertialsystem vollkommen mitgeschleppt wird.

Dieser Sachverhalt in der erweiterten Gravitationstheorie ist mit der üblichen Deutung des MACHschen Prinzips in Übereinstimmung. Im allgemeinen besagt nämlich das MACHsche Prinzip, daß das Inertialsystem durch die großen Massen im Universum bestimmt ist. Verschwinden aber diese Massen, so bleibt als einzige Masse zur Bestimmung des Inertialsystems die Kugelschale übrig. Die obigen Überlegungen zeigen, daß dies in der erweiterten Gravitationstheorie tatsächlich der Fall ist: Wenn die Masse des Universums im Vergleich zu der Masse einer rotierenden Kugelschale immer geringer wird, so folgt das Inertialsystem im Innern der Kugel immer mehr der Rotation der Kugel selbst, bis es zuletzt bei verschwindender Massendichte der Kugel vollkommen folgt.

Obwohl dieser Grenzfall des MACHschen Mitschleppens uns experimentell nicht zugängig ist, steht zu erwarten, daß in den nächsten Jahren der Grenzfall schwacher Felder experimentell geprüft wird [14]. Falls eine Messung des Effektes innerhalb weniger Prozent gelingt, so wäre ein solches Experiment eine weitere Prüfung der erweiterten Gravitationstheorie gegenüber der EINSTEINschen Theorie.

Dem Center for Theoretical Studies der Universität von Miami möchte ich für die Gastfreundschaft danken, die diese Arbeit ermöglicht hat.

[14] L. I. SCHIFF, Phys. Rev. Letters **4**, 215 [1960].